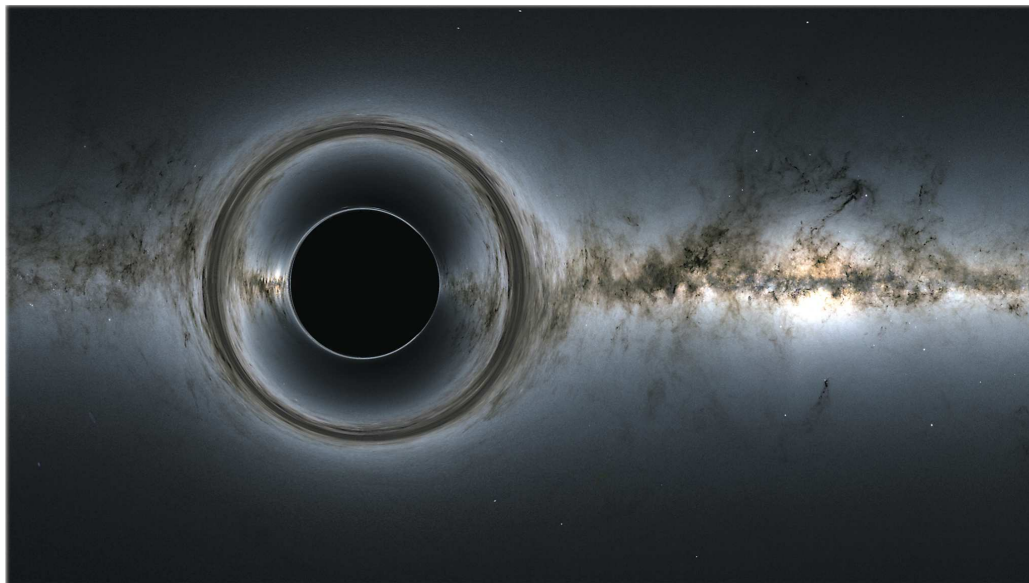


陷俘面，黑洞的拓扑，和正质量定理

黄蓝莹 (Lan-Hsuan Huang) Dan A. Lee



1. 引言

最初发表于 1915 年的 Albert Einstein (爱因斯坦) 的广义相对论, 成功地将狭义相对论和引力统一在一起, 并推出诸多继而被证实的预言, 成为 20 世纪物理学最伟大的成功之一. 或许该理论最轰动的特征之一就是黑洞的概念——一个即使是光也无法逃逸的区域. 但是精确来说什么是黑洞? 黑洞在宇宙中真实存在吗? 黑洞和数学有什么关系?

几代研究者都在思考这些及其他相关的问题. 2020 年的 Nobel (诺贝尔) 物理学奖被授予数学物理学家 Roger Penrose (彭罗斯), 因其“黑洞形成是广义相对论的一个坚实预言的发现”, 还有天体物理学家 Reinhard Genzel (根泽尔) 和 Andrea Ghez (盖兹), 因他们的“我们星系中心超大质量致密天体的发现.” 尽管 Einstein 方程最早发现的非平凡解——Schwarzschild (施瓦茨席尔德) 时空——描述的是一个黑洞, 很多物理学家, 包括 Einstein, 都认为黑洞区域可能只在高度对称的解中存在, 这些解不足够真实去描述真实的自然. Penrose 深具影响的 1965 年的论文 [Pen65] 意味着黑洞相关的奇性行为即使是在没有对称性存在的情形下也仍然存在, 这足以使很多人信服黑洞形成是一个真实的物理现象. 但是可能正如很重要地, Penrose 通过引入整体微分几何和拓扑的方法革命性地

译自: Notices of the AMS, Vol. 69 (2022), No. 4, p. 536–545, Trapped surfaces, topology of black holes, and the positive mass theorem, Lan-Hsuan Huang and Dan A. Lee, figure number 9. Copyright ©American Mathematical Society 2022. All rights reserved. Reprinted with permission. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Lan-Hsuan Huang 是康涅狄格大学数学教授, 她的邮箱地址是 lan-hsuan.huang@uconn.edu. Dan A. Lee 是纽约城市大学皇后学院和纽约市立大学研究生中心数学副教授, 他的邮箱地址是 dan.lee@gc.cuny.edu.

改变了广义相对论的研究,与之前更加基于计算的方法截然不同.

也是从上世纪 60 年代开始,对类星体的研究最终使得天体物理学家们假设在大多数星系中心存在着黑洞,包括我们自己的星系,银河系.直接观测不能发光的东西是困难的,但从上世纪 90 年代开始, Genzel 和 Ghez 领导的独立团队开始对银河系中心附近的恒星做细致的观测,经过数十年的越来越精确的数据收集,我们现在有信心认为这些运动是和一个质量是 43 亿个太阳质量的黑洞的存在相一致的 [EG96, GKMB98], 见图 2.¹⁾

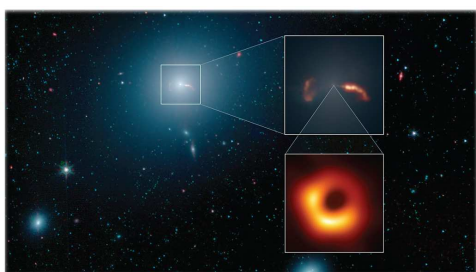


图 3 这幅图像展示了椭圆星系 Messier 87. 右上嵌入小图是从星系的超大质量黑洞出来的喷流所产生的两激波的特写. 右下嵌入小图是 Einstein 望远镜生成的该黑洞的图像 [Eve19]



图 1 这幅计算机模拟的图像展示了一个星系中心的超大质量黑洞. 黑色的区域代表着黑洞事件视界的快照. 来自背景恒星的光被黑洞的强引力场拉伸并变形

甚至在更近期,在 2019 年,事件视界望远镜 (Event Horizon Telescope)——一个联合全球射电望远镜的国际合作项目——使我们看到了 Messier 87 (一个距地球 550 亿光年的椭圆星系) 中心黑洞的壮丽图像. 见图 3.

在这篇文章中,我们将展示 Penrose 开创性的关于陷俘面 (trapped surfaces) 和边缘外陷俘面 (marginally outer trapped surfaces, MOTS) 的概念,以及它们的一些应用. 特别地,我们将讨论 Stephen Hawking (霍金) 关于黑洞的拓扑的结果,和开始于 Richard Schoen 和丘成桐 (Shing-Tung Yau) 的正质量定理的一些最新的进展. 对 MOTS 的研究提供了一种理解黑洞的某些性质的有效方法,并且同极小曲面的研究有许多相似之处. 极小曲面理论是一个数学上很丰富的主题,它有一个很长的可以追溯到 18 世纪 Lagrange (拉格朗日) 工作的历史. 除广义相对论之外,极小曲面在相当多的领域,如建筑,生物,工程中都具有很多的应用. 见图 4.²⁾ 探究 MOTS 和极小曲面之间的有趣联系带来了对广义相对论和微分几何的大量而有成果的发展.

2. 陷俘面

在这篇文章中我们基本的设定背景是一个 4 维时空,代表着 1 个时间维度和 3 个空间维度,并且由于我们要描述一个 (实际上的) 孤立引力系统,例如一个星系,我们假设这个时空在“无穷远 (infinity)”附近渐近地是一个平凡的平直时空,也就是通常所说的 Minkowski (闵科夫斯基) 时空. 黑洞的严格数学上的一个一般定义是相当技术性的,但是粗略来说,当我们说到时空中的黑洞区域 (*black hole region*), 我们指的是一个具有如下

1) 图 2 是 W. M. Keck 天文台的照片,因版权关系略去. 从上世纪 90 年代始, Ghez 及其团队用 Keck 天文台的望远镜和自适应光学系统跟踪了若干颗围绕银河系中心运行的恒星运动. —— 译注
2) 图 4 是极小曲面在建筑和 3D 打印技术中的应用,因版权关系略去. —— 译注

性质的区域: 从黑洞区域发出的光永远不能到达该区域的补集, 而从其补集的每一点我们都能跟随一条光线“逃逸到无穷远”. 黑洞区域的边界叫做事件视界 (*event horizon*). 在时空中给定一个空间的 3 维“时间快照” M , 我们想要理解 M 中的哪些点位于黑洞中, 但是不幸的是, 由于黑洞区域只能由时空的整体性质在技术上定义, 在没有 M 的长时间时空未来的完全知识的情况下, 想要知道 M 中的一个给定点是否位于黑洞中是不可能的.

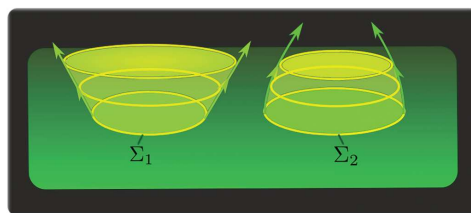


图 5 通常, 外向“光壳”穿过曲面具有增加的面积形式, 如对曲面 Σ_1 所示. 同时, 对于陷俘面 Σ_2 , 面积形式是减小的

Penrose 的陷俘面概念给我们提供了一个不需要知道其长期演化就能理解黑洞位置的可行途径: 在时空中给定一个 2 维曲面 Σ , 想象从 Σ 的每点发出一条光线, 然后定义 Σ_t 是通过追随这些光线到一个参数——时间 t 而得到的曲面, 因此 Σ_t 可以被认为是从 Σ 发出的一个“光壳 (shell of light)”. (注意我们不应该将这个 t 想成实际的“时间”, 因为光不经历时间的流逝.) 我们通常期望如果我们朝内射出这些光, Σ_t 的面积将随 t 减小, 而如果我们向外射出它们, Σ_t 的面积将增加, 就像 Minkowski 时空的一个标准球面的情形. 但是, 在强引力存在的条件下, 外行光壳族可能在 Σ 的每一点都具有减小的面积形式, 在这种情形下我们说 Σ 是一个 (外) 陷俘面 (*(outer)trapped surface*). 见图 5. 同时, 一个边缘外陷俘面 (*marginally outer trapped surface*) (或 *MOTS*) 指的是面积形式在每一点对时间 t 都是一阶不变的之边缘情形.

Penrose 著名的奇点定理讲, 在一定的物理上合理的假设下, 一个闭陷俘面的存在意味着存在一条从该陷俘面发出的光线最终到达一个奇点. 直觉上, 一个陷俘面的行为感觉有点像说即使光线是“向外指向的”, 它们仍然是“向内运动的”, 这模糊地抓住了光不可能“逃逸”的意思. 因为这个启发和 Penrose 的奇点定理, 物理学家们经常将陷俘面与黑洞的存在联系起来, 而事实上, 在一定的整体假设下, 人们甚至能证明陷俘面一定位于黑洞区域之内. 由于这种关系, M 的 (弱) 陷俘区域 (*(weakly) trapped region of M*) (我们定义它为被陷俘面或 MOTS 围住的 M 的区域) 可以被看作是 M 和黑洞区域之交的更简单的替代, 而 M 的表观视界 (*apparent horizon of M*) (我们定义其为 M 的陷俘区域的边界), 可以被看作是 M 和事件视界之交的更简单替代. 这些概念的好处是陷俘区域和表观视界是由沿空间 3 维“时间快照” M 的数据完全确定的.

3. 时空几何

由于我们想要考虑 4 维时空, 但没有唯一确定的“时间坐标”, 广义相对论的自然背景是一个 4 维流形. 一个 4 维流形 N 上的一个 Lorentz (洛伦兹) 度量 g 在 N 上的每一个切空间定义了一个号差为 $(-, +, +, +)$ 的内积, 光滑地依赖于基点. 这意味着在 N 上的每一点, 有一个由切向量 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 组成的正交基, 使得 $g(e_0, e_0) = -1$, 以及对 $i = 1, 2, 3$, $g(e_i, e_i) = +1$. 因此如果一个切向量 v 用这组基写出是 (v^0, v^1, v^2, v^3) , 那么 $g(v, v) = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$. 如果我们将 Riemann (黎曼) 几何想作局部调节为 Euclid (欧几里得) 度量 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, 我们也可以类似地将 Lorentz 度量看作

是在 Minkowski 度量 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 上局部调节的. 狭义相对论基本上是 Minkowski 几何上的物理, 因此 Lorentz 流形是广义相对论自然背景的原因是该理论应该是狭义相对论上的局部调节. 更进一步, 我们将经常不明说地假设在某种意义下 g 渐近于 Minkowski 度量.

对 N 上的任意切向量 v , 称它是类时的 (timelike) 如果 $g(v, v) < 0$, 类光的 (null) 如果 $g(v, v) = 0$, 类空的 (spacelike) 如果 $g(v, v) > 0$.

因此例如, e_0 是类时的, e_1 是类空的, $e_0 + e_1$ 是类光的. 类光向量形成一个双锥 (double cone), 它将类时向量和类空向量分开. 一个时空 (spacetime) 是一个带有整体定义的单位类时向量场的 4 维 Lorentz 流形 (N, g) , 我们可以将这个单位类时向量场选作我们在每点的 e_0 . 这个选择允许我们进一步区分位于上半个光锥面之上或之内的未来 (future) 类光或类时向量, 和位于下半个光锥面之上或之内的过去 (past) 类光或类时向量.

N 的一个子流形被称作是类时的, 如果它的所有切向量都是类时的, 或等价地, 如果 g 在其上诱导出一个 Riemann 度量. 特别地, 我们定义 N 的一个类空分层面 (spacelike slice) 为一个 3 维类空超曲面 M , 它就是之前提到的“时间快照”. 一个类空分层面 M 的诱导 Riemann 度量 g 和第二基本型¹⁾ k 可以主要地抓住沿 M 的时空几何, 我们将把 (M, g, k) 称为一个初始数据集 (initial data set). 一条曲线被称为类光的 (或类时的), 如果它的切向量在每点都是类光的 (或类时的). 见图 6. 如同在 Riemann 几何中, 一个 Lorentz 度量 g 给我们一个“直线”的概念, 我们称之为测地线. 一条光线 (light ray) 的路径在时空中描绘出一条未来类光测地线, 而一个有质量的检验粒子描绘出一条未来类时测地线. 一个描绘出类空测地线的检验粒子将跑得比光速快, 因此是非物理的.

Einstein 方程要求 g 的某些“曲率”必须等于描述能量在时空中分布的压力 - 能量张量 (stress-energy tensor).²⁾ 我们可以将这些方程看作 g 上的以压力 - 能量张量作为源的一个复杂的非线性偏微分方程组. 一个初始数据集 (M, g, k) 可以被看作这个偏微分方程组的 Cauchy (柯西) 数据, 像 Yvonne Choquet-Bruhat (萧凯 - 布吕阿) 关于 Einstein 方程的适定性的基础工作所详细分析的.

正如前面提到的, Schwarzschild 度量是第一个发现的非平凡解, 源项为零. 在一个特殊的坐标选择下, 质量为 m 的 Schwarzschild 度量 (Schwarzschild metric of mass m) 可以写为

$$g_m = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2,$$

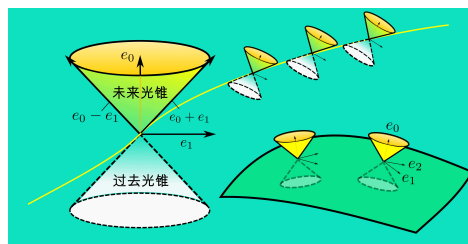


图 6 在每一点的切空间, 我们可以定义未来和过去光锥. 图中给出了两个未来类光向量 $e_0 + e_1$ 和 $e_0 - e_1$. 黄色曲线是类光的, 它每一点的切向量都是类光的. 右下的子流形是类空的, 因为它在每点的切向量都是类空的

1) $M \subset (N, g)$ 的第二基本型定义为 $\nabla_{\mathbf{g}} \mathbf{n}$ 的切向部分, 其中 \mathbf{n} 是 M 的未来单位法线. —— 原注

2) 具体地, 这里所说的曲率指的是 g 的 Einstein 张量, 定义为 $\mathbf{G} = \mathbf{Ric} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g$, 其中 \mathbf{Ric} 和 \mathbf{R} 分别是 g 的 Ricci 曲率和数量曲率. —— 原注

这是 $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$ 上的一个光滑 Lorentz 度量, 其中 $v \in \mathbb{R}, r \in (0, \infty), d\Omega^2$ 是球面 S^2 上的标准 Riemann 度量. 在这个时空中, 我们可以证明从区域 $r \leq 2m$ 内发出的光线永远不能到达区域 $r > 2m$, 而 $r > 2m$ 内的所有点都能通过一条光线连接到“无穷远”. 或者换句话说, $r \leq 2m$ 区域是一个黑洞区域, 其边界 $r = 2m$ 是事件视界. 还有一个事实是, 当 r 趋于 0 时, 曲率发散使度量变得奇异, 进一步, 任何始于 $r < 2m$ 的光线 (或有质量的检验粒子) 都将不可避免地撞入这个奇点. 见图 7.

4. 曲面面积的变分

前面我们是用“光亮”的递减面积形式描述的陷俘面. 现在我们将把它讲得精确些, 但

首先我们来讨论更简单的改变一个 3 维 Riemann 流形 (M, g) 上的曲面 Σ 的面积形式的概念. 假设 ν 是 Σ 上的一个单位法向量, 我们将把它看作是“外向的”方向 (不管 Σ 是否将 M 分成“外部”和“内部”), 令 Φ_t 为 M 上的一族微分同胚, Φ_0 为恒等映射. 则 $\Sigma_t := \Phi_t(\Sigma)$ 定义了一族曲面, 有时被叫做 Σ 的变分, 其沿着 Σ 的一阶变分向量场 X 定义为: 对每个 $p \in \Sigma, X(p) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Phi_t(p)$. 让我们来考虑外向法变分 (outward normal variations), 它们是那些沿着 Σ 对某光滑函数 u 满足 $X = e^u \nu$ 的变分.

Σ 的一个简单变分是平行曲面族, 通过在每一点 $p \in \Sigma$ 对小的 t 取 $\Phi_t(p) = \exp_p(t\nu)$ 得到, \exp_p 是在 p 点的指数映射. 这只是意味着 $\Phi_t(p)$ 是从 p 点开始然后沿着指向 ν 方向的测地线移动 t 的单位弧长而得到的. 这些被称作平行曲面, 因为 Σ_t 将精确地在 ν 方向上离开 Σ 一个 (带符号的) 距离 t (对足够小的 t). 对这组曲面, 一阶变分 X 就是 ν , 而这组曲面给我们提供了一个定义平均曲率 (mean curvature) H 的途径: 它测量了当我们通过平行曲面族移动时面积的局域增加 (或减少). 准确地, 如果 $d\sigma$ 表示 Σ 上的诱导面积形式, $d\sigma_t$ 表示 Σ_t 上的诱导面积形式 (然后通过 Φ_t 拉回到 Σ 上), 则平均曲率 H 定义为

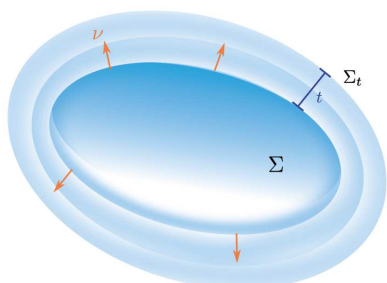


图 8 在 ν 方向上离开 Σ 距离 t 的平行曲面. Σ 的正平均曲率以 Σ_t 随 t 递增 (对小的 t) 的性质为特征

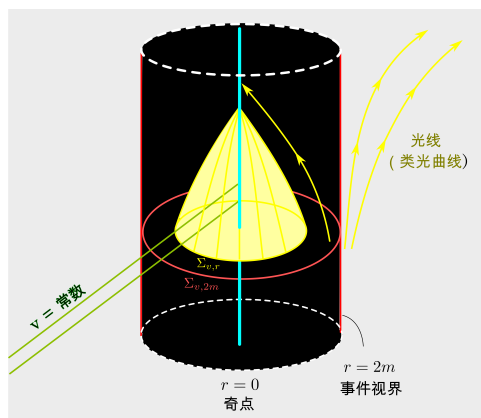


图 7 Schwarzschild 度量在内行 Eddington-Finkelstein 坐标下 (压缩了 1 个维度). 任何从 $r < 2m$ 的点发出的光线都将撞入 $r = 0$ 的奇点. 由常数 v, r 坐标定义的面 $\Sigma_{v,r}$ 当 $r < 2m$ 时是陷俘面, 当 $r = 2m$ 是 MOTS 度量

Σ 上的唯一函数, 它在每个点 $p \in \Sigma$ 处满足

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d\sigma_t = H d\sigma.$$

注意 H 的符号将依赖于 ν 的选择. 见图 8.

人们然后可以证明, 对任意 (any) 具有一阶变分 $X = e^u \nu$ 的外向法变分, 我们有 $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d\sigma_t = e^u H d\sigma$. 由此我们看到如果在 Σ 上 $H > 0$, 则所有小的外向法变分都将增加面积, 而如果在 Σ 上 $H < 0$, 则所有小的外向法变分都将减小面积. 一个极小曲面 (minimal surface) 的定义是一个处处 $H = 0$ 的曲面. 这样叫是

因为任意在所有小的外向和内向法变分中有最小面积的曲面，一定有 $H = 0$. (注意这样叫有一点不准确，因为一个极小曲面不需要在变分中面积最小.)

现在考虑一个 4 维时空 (N, g) 中的类空 2 维曲面 Σ . 现在，代替在 Σ 的每一点有一个 1 维的法向量空间，我们有一个 2 维的法向量空间. 但是，我们的时空几何选择出刚好两个未来类光 (*null*) 方向，它们对应于两个光线能够发出的法方向. 具体地说，如果 ν 是一个与 Σ 正交的类空单位向量， e_0 是一个与 Σ 和 ν 都正交的未来类时单位向量，则那两个未来类光方向由 $e_0 + \nu$ 和 $e_0 - \nu$ 给出. 假设 ℓ 是一沿 Σ 定义的未来类光向量场，它在每一点都与 Σ 正交. 注意我们不能要求“单位长度”的归一化，因为 ℓ 具有“长度”零. 用一个正函数乘以 ℓ 得到另外一个沿 Σ 定义的未来类光法向量场，但是抹掉这类重新标度，就只有两个未来类光法方向的选择，我们可以指定其中之一为“外向”. 对 Σ 给定一个 (未来) 外向类光法向量的选择 ℓ ，我们在如下的构造中使用它：

在 N 上通过定义 $\Phi_t(p) = \exp_p(t\ell)$ 来定义一族 $\Sigma_t = \Phi_t(\Sigma)$ ，其中 \exp_p 是在 p 点的指数映射. 这就是在第 2 节中讲到的“光亮”族，它是 Riemann 背景下平行曲面族的类似. 现在我们定义 (外向) 类光膨胀 ((*outward*) *null expansion*), 类似于我们如何定义平均曲率：它是在 Σ 上具有如下性质的唯一函数 θ ：

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} d\sigma_t = \theta d\sigma, \quad \text{在每一点 } p \in \Sigma \text{ 处.}$$

由于 θ 依赖于 ℓ 的具体选择，而不存在对 ℓ 标度的自然选择，只有 θ 的符号是 Σ 的一个物理的或几何的性质. 我们现在可以定义 Σ 为一个 (外) 陷俘面 如果 $\theta < 0$ ，一个 (外) 非陷俘面 ((*outer*) *untrapped surface*) 如果 $\theta > 0$ ，一个 边缘外陷俘面 (*marginally outer trapped surface*) (或 *MOTS*) 如果 $\theta = 0$.

现在假设 2 维曲面 Σ 位于一个指定的时空 (N, g) 的类空分层面 M 上. 在这情形， M 中 Σ 的一个外向法向量 ν 的选择给出我们一个 Σ 上的外向类光法向量 ℓ 的选择，通过像上面一样取 $\ell = e_0 + \nu$ ，其中 e_0 是 M 的未来类时单位法向量. 在 M 在 N 中是全测地的特殊情形， θ 就等于 H ，一个 *MOTS* 就是一个极小曲面. 由于这个，*MOTS* 可以被看作极小曲面的推广，因此任何关于 *MOTS* 的来源于物理的一般事实或启发都自动地翻译到关于极小曲面的叙述中. 反之，高度发展的极小曲面理论的一些部分可以被用来处理关于 *MOTS* 的问题. 例如，利用障碍 (*barriers*) 的极小曲面的存在理论被 Lars Andersson 和 Jan Metzger，以及 Michael Eichmair 使用，来证明相应的 *MOTS* 的存在性定理，他们还证明了一个表观视界 (*apparent horizon*) 一定是一个光滑的 *MOTS* [AEM11].

5. 黑洞的拓扑

回到 Schwarzschild 时空的例子，每一 (v, r) 的选择定义了一个 2 维球面 $\Sigma_{v,r}$. 在这个情形，对两个未来类光方向中“外向的”那个有一个自然的选择，我们可以将它作为我们的 ℓ ，然后我们可以计算 $\Sigma_{v,r}$ 的类光膨胀 θ 来判断 $\Sigma_{v,r}$ 当 $r < 2m$ 时是陷俘的，当 $r > 2m$ 时是非陷俘的，当 $r = 2m$ 时是一个 *MOTS*. 见图 7. 事实上，可以证明对于 Schwarzschild 的一个类空分层面 M ， M 中的表观视界实际上就等于 M 和事件视界的交. 更一般地，这对“稳态 (*stationary*)”时空的任意分层面 M 都是对的.¹⁾ 利用这个事

1) 一个时空被称为稳态的，如果它有一个整体的渐近类时 Killing 向量场. —— 原注

实, Hawking 证明了在合理的物理假设下, 稳态时空中事件视界的任意截面 (也就是一个类空 2 维曲面) 一定是一个拓扑球面 [Haw72]. 或者用更简单的语言, 一个黑洞的表面一定是一个拓扑球面. 基于 Gary Gibbons 的一个提议, Hawking 推广了他的讨论来证明即使没有稳态假设 (这是很强的了), 表观视界也一定是拓扑球面 [Haw73]. 我们下面将解释这个结果.

令 M 是时空的一个类空分层面. 给定 M 中的曲面 Σ 及其上“外向”法线的一个选择 ν , 我们说 Σ 是一个 M 中的局域最外 MOTS (*locally outermost MOTS in M*), 如果它是一个 MOTS 并且 M 中不存在 $\theta \leq 0$ 的任意小的 Σ 的外向法变分. M 中的一个表观视界一定是 M 中的一个局域最外 MOTS, 这是在 Hawking 的证明中用到的相关性质, 它是变分法和 Gauss-Bonnet (高斯 - 博内) 定理的一个漂亮的结合.

定理 1 (Hawking) 满足主能量条件的初始数据集中的任意可定向局域最外闭 MOTS 一定是一个拓扑球面.

主能量条件是对于压力 - 能量张量的一个物理上现实的假设¹⁾, 我们后面再回来讲这一点. 这个结果被 Gregory Galloway (盖洛韦) 和 Schoen 推广, 他们证明了表观视界的更高维的对应一定是拓扑 Yamabe (山边) 正的 [GS06].

6. 局域最外的性质

Schoen 和丘成桐是最早注意到极小曲面可以用来研究数量曲率的. 一个 Riemann 度量 (M, g) 的数量曲率 (*scalar curvature*) R_M 是 M 上的一个标量函数, 定义为 g 的 Riemann 曲率张量的完全迹, 并且正如其名所示, 它是能从 g 算出来的最简单的在坐标变换下不变的标量函数. 在 3 维, 它具有性质: 对于小的 $r > 0$, 围绕 $p \in M$ 的半径为 r 的测地球的体积是 $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2\pi}{45}R_M(p)r^5 + O(r^7)$, 因此 $R_M(p)$ 测量了 p 点周围小球的体积离开它们相应的 Euclid 情形下对应球的体积的偏差. 一个相似的表达式在其它维数的情形也成立, 特别地, 对一个 2 维曲面 Σ , R_Σ 正好是我们更熟识的 Gauss 曲率 K_Σ 的 2 倍.

Hawking 研究了最外 MOTS Σ (主能量条件) 和 Σ 的 Gauss 曲率之间的关系, Schoen 和丘成桐类似地研究了一个面积极小的曲面 Σ , 其周围 Riemann 空间的数量曲率和 Σ 的 Gauss 曲率之间的关系. 更准确地讲, 假设我们在一个数量曲率非负的 3 维 Riemann 流形上有一个闭的可定向曲面 Σ . Schoen 和丘成桐观察到如果相对于 Σ 的所有小变分 Σ 极小化面积, 则 Σ 在拓扑上一定是一个球面或环面. 通过一个改进的论证, Mingliang Cai (蔡明亮) 和 Galloway 证明了如果 Σ 是严格 (*strictly*) 面积极小的, 则 Σ 一定是一个拓扑球面. 我们将解释一个类似的结果, 它是 Hawking 定理的一个特殊情形.

给定一个曲面 Σ 和“外向”法向量 ν 的选择, 我们说 Σ 是一个局域最外极小曲面 (*locally outermost minimal surface*), 如果它是一个极小曲面, 并且不存在 $H \leq 0$ 的任意小的 Σ 的外向法变分.

定理 2 一个 3 维 Riemann 流形 (M, g) 中的任意具有非负数量曲率的可定向局域最外闭极小曲面 Σ 一定是一个拓扑球面.

1) 具体地, 说一个初始数据集 (M, g, k) 满足主能量条件, 如果 Einstein 张量满足 $\mathbf{G}(e_0, \nu) \geq 0$, 其中 e_0 是 M 的未来法线, ν 是任意未来类光或类时向量. 该条件也可以完全用 (g, k) 表达. —— 原注

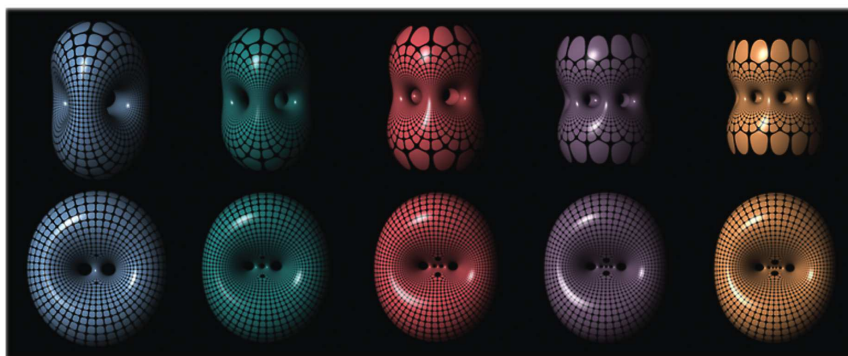


图 9 S^3 中 Lawson 的极小曲面, 亏格分别为 2, 3, 4, 5, 6, 以两种方式立体投影到 \mathbb{R}^3

证明 令 Σ_t 为 M 中 Σ 的一个外向法变分, 具有一阶变分 $X = e^u \nu$, 并令 H_t 表示 Σ_t 的平均曲率 (拉回到 Σ). 我们总可以找到一个外向法变分使得对某个常数 λ 有

$$\left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=0} = \lambda e^u. \quad (1)$$

(更准确地, 选择 e^u 为线性化的平均曲率算子的主本征函数.) Σ 上的局域最外假设意味着 $\lambda \geq 0$, 因为如果不是这样的话, 我们对小的 $t > 0$ 会有 $H_t < 0$.

常规的几何计算, 包括利用 Gauss 方程, 可以得到

$$\left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=0} = e^u \left(-\Delta_{\Sigma} u - |\nabla u|^2 + K_{\Sigma} - \frac{1}{2} R_M - \frac{1}{2} |A|^2 \right) \leq e^u (-\Delta_{\Sigma} u + K_{\Sigma}), \quad (2)$$

其中 Δ_{Σ} 表示 Σ 上的 Laplace-Beltrami (拉普拉斯-贝尔特拉米) 算子, A 是 Σ 在 M 中的第二基本型, 我们用到了 $R_M \geq 0$ 的假设. 结合这个和 (1), 我们有

$$\lambda \leq -\Delta_{\Sigma} u + K_{\Sigma},$$

然后将它在 Σ 上积分并应用 Gauss-Bonnet 定理, 可以得到

$$0 \leq \lambda \cdot (\text{Area } \Sigma) \leq 2\pi\chi(\Sigma).$$

因此 Σ 是一个环面或一个球面.

要排除环面, 假设其反, 即 Σ 是一个环面. 则 $\chi(\Sigma) = 0$, 因此 $\lambda = 0$. 在这种情形, 一个反函数定理的论证可以用来构造一个外向法变分 Σ_t , 具有每个 Σ_t 都有常数 (constant) 的平均曲率 H_t 这一附加要求性质. 令 $X_t = e^{u_t} \nu_t$ 为 Σ_t 在任一时刻 t 的一阶变分. 像在 (2) 中, 我们有

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} e^{-u_t} \leq -\Delta_{\Sigma_t} u_t + K_{\Sigma_t}.$$

由于 Σ_t 是一个环面, 并且 $\frac{\partial H_t}{\partial t}$ 在 Σ_t 上是常数, 在 Σ_t 上积分上面不等式的两边, 对所有 $t \geq 0$ 得到 $\frac{\partial H_t}{\partial t} \leq 0$. 这与局域最外假设矛盾. ■

没有局域最外假设, 一个极小曲面可以有更高的亏格. 例如, 标准 3 维球面容许任意亏格的闭极小曲面. 见图 9. 在过去的 10 年中, Fernando Marques 和 Andre Neves 利用极小化-极大 (min-max) 方法发展了极小曲面的研究, 建立在他们的工作之上, Haozhao Li 和 Xin Zhou (周鑫) 证明了一个一般的正 Ricci (里奇) 曲率的 3 维闭 Riemann 流形容许任意高亏格的闭极小曲面, Antoine Song 证明了丘成桐 1982 年的猜想, 即所有的 3 维闭 Riemann 流形容许无限多的闭极小曲面.

定理 1 的证明概念上和定理 2 的证明是相似的. 在该情形, 我们从一个初始数据集 (M, g, k) 中的一个可定向局域最外闭 MOTS Σ 开始. 我们还是看 M 中 Σ 的外向法变分, 但是取而代之 (2), 对某个量 W 我们得到

$$\left. \frac{\partial \theta_t}{\partial t} \right|_{t=0} \leq e^u (-\Delta_\Sigma u + K_\Sigma + \operatorname{div}_\Sigma W),$$

这回不等式来自主能量条件而不是非负数量曲率. 证明的剩下部分基本上是相同的, 因为额外散度项的积分是零. 但是, 处理 $\left. \frac{\partial \theta_t}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ 的情形需要更多的论证 (由 Galloway), 因为 $\frac{\partial \theta_t}{\partial t}$ 在一个一般时刻 t 的表达式有一个额外的包含 θ_t 的项 (它在 $t = 0$ 的情形刚好消失).

7. 正质量定理

我们现在讨论前面一节拓扑的讨论如何能用来证明著名的正质量定理. 令 (M, g, k) 为一初始数据集, 并假设它是渐近平坦的 (*asymptotically flat*), 意思是在某种准确的意义上 (我们在此不描述了), 在坐标系中, 度量 g_{ij} 渐近于 Euclid 度量 δ_{ij} , 而第二基本型 k_{ij} 渐近趋于 0. 一个渐近平坦的初始数据集有定义良好的总 ADM 能动量 (*ADM energy-momentum*) $(E, P_1, P_2, P_3)^{1)}$.

定理 3 (正质量定理) 令 M 为一完全的渐近平坦 3 维初始数据集, 满足主能量条件. 则 ADM 能动量 (E, P_1, P_2, P_3) 满足 $E \geq |P|$. 进一步, 等式 $E = |P|$ 成立, 当且仅当 (M, g) 能以第二基本型 k 等度量嵌入到 *Minkowski* 时空.

这被称作“正质量定理”, 是因为一个具有未来类时能动量 $E > |P|$ 的物体被称作具有正质量. 准确地, 质量是 $\sqrt{E^2 - |P|^2}$. 注意质量为 m 的 Schwarzschild 时空的一个类空分层面将 (不足为奇地) 有等于 m 的 ADM 质量. 负质量是非物理的, 它将对应于过去类时能动量 $E < -|P|$, 而类空能动量 $|E| < |P|$, 这将对应于“虚质量”, 也是非物理的, 因为它和超过光速运动的物体关联. 同时, 类光能动量 $|E| = |P|$ 对应于零质量.

出于物理的原因, 正质量定理是人们特别想要的. 主能量条件可以被描述为这个合理的物理假设: 无论用任何观测器去观测, Einstein 方程的源都不能运动得比光还快. 正质量定理宽松地判定, 只要这些源不能运动得比光快, 源的整体位形, 从远处看来, 就不应行为上像一个比光运动快或一样快的物体. 一个违反正质量定理的例子可以是排斥 (*repels*) 而非吸引远处物体的正质量源的位形. 由于 Einstein 方程的非线性性, 证明这种离谱的事不可能发生是非常不平凡的.

正质量定理的研究有很长的历史. 一个特别重要的特殊情形是当 M 是时空的一个全测地 (*totally geodesic*) 分层面时. 在这种情形, 正质量定理约化为一个关于 Riemann 几何的表述: 如果 (M, g) 是一个具有非负数量曲率的完全的渐近平坦流形, 则 $E > 0$, 除非 (M, g) 是 Euclid 的. 这个特殊情形首先由 Schoen 和丘成桐于 1979 年用极小曲面证明, 然后很快他们用 Jang 方程对一般情形又证明了 $E \geq 0$ [SY79, SY81]. Edward Witten (威顿)

1) ADM 能动量由物理学家 Arnowitt, Deser 和 Misner 给出表述, 具体地, 数 (E, P_1, P_2, P_3) 由下述诸式定义:

$$16\pi E = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \right) \frac{x_j}{r} d\sigma, \quad 8\pi P_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \sum_j (k_{ij} - (\operatorname{tr} k) g_{ij}) \frac{x_j}{r} d\sigma. \quad \text{——原注}$$

利用旋量的讨论又证明了 $E \geq |P|$ [Wit81]. 更准确地这可能应被称作一个“非负质量定理”, 因为它没有处理定理 3 中的第二句关于 $E = |P|$ 的表述, 我们将把它称为正质量定理的等式情形 (*equality case of the positive mass theorem*). 在一篇 2015 年的与 Eichmair 和 Schoen 的合作文章中, 我们通过延伸 Schoen 和丘成桐的论证并用 MOTS 代替极小曲面, 对这个非负质量定理给出了一个不同的证明 [EHLS16]. 在那篇文章中我们也触及了技术上更具挑战性的 n 维分层面的情形, 对 $3 < n < 8$, 通过引入一个新的泛函, 它模仿面积泛函的第一变分. 最近有 Schoen 和丘成桐, 以及 Lohkamp 的处理高维的新结果. 人们还能减弱定理 3 的假设, 从而允许 M 具有一个边界, 只要该边界是一个闭的陷俘面或 MOTS [GHHP83, LLU21]. 物理上, 这对应于允许不对其内部几何做过度假设的黑洞的可能性.

我们略述一下 3 维 M 的非负质量定理的证明.

证明梗概 由一个巧妙的密度定理 (见 [EHLS16] 的 §6) 可以证明, 不失一般性, 我们可以假设“严格的”主能量条件成立并且初始数据 (g, k) 在类空无穷远有特别“好的”渐近性质.

通过反证法证明. 假设 $E < |P|$. “好的”渐近性质意味着存在不相交的坐标面 Π_1 和 Π_2 , 满足 Π_1 是陷俘的, 而 Π_2 是非陷俘的; 也就是, 在 Π_1 上 $\theta < 0$, 在 Π_2 上 $\theta > 0$. 见图 10. 从 PDE 的角度, 这意味着它们为 MOTS 方程 $\theta = 0$ 提供了闸函数 (barriers). 利用这些闸函数, 一个根据 Eichmair [Eic09] 的存在性定理允许我们构造一个具有限定边界的 MOTS, 是被面 Π_1 和 Π_2 夹在中间的. 通过将该限定边界变得越来越大, 我们可以提取出一个子序列极限面, 它是一个被 Π_1 和 Π_2 夹住的完全的 MOTS Σ , 并且我们可以证明 Σ 本身是一个渐近平面的. 尽管 Σ 不必是一个局域最外 MOTS, 它仍然具有一个“MOTS 稳定性”的性质, 再加上严格的主能量条件, 可以被用来以一种和定理 2 的证明概念上相似的方式证明 $\int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma > 0$. 这个“严格的”能量条件是强迫此不等式严格的因素. 最后, 带有边界的 Gauss-Bonnet 定理意味着这对一个渐近平面的曲面是不可能的. ■

要证明正质量定理等式的情形需要大量的额外工作. 必须证明如果 $E = |P|$, 则在上面定理中所述的意义下, 分层面 M 确实在 Minkowski 时空内. 这实质上意味着 $E = |P| = 0$, 因为 Minkowski 时空的任意分层面都有这个性质. Robert Beig 和 Piotr Chruściel [BC96], 还有 Chruściel 和 Daniel Maerten 的工作对任意自旋流形证明了等式的情形. 这涵盖了所有的 3 维流形, 因为所有的 3 维流形都带有自旋结构. 更近期, 我们提供了一种不同的证明, 它避免了使用自旋假设 [HL20b]. 我们的证明使用了满足主能量条件的初始数据集之间的变分论述, 它被表明与 Justin Corvino 和我们的第一作者 [CH20] 研究的“改进”主能量条件的问题具有一种有趣的联系. 主能量条件的改进明显地与微分几何中的数量

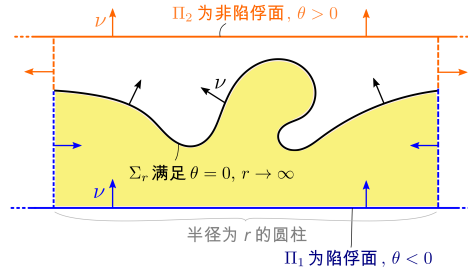


图 10 在 (矛盾的) 假设 $E < |P|$ 下, 两个坐标平面 Π_1 和 Π_2 , 以及大半径的柱面的侧面, 为一个具有指定边界的 MOTS Σ_r 的存在性提供了障碍. 当 $r \rightarrow \infty$ 时 Σ_r 的一个子序列极限曲面是满足一个稳定性性质的一个完全 MOTS

曲率形变 (scalar curvature deformation) 的基本问题相关, 并在我们最近的工作 [HL20a] 中得到了进一步的探讨.

我们的证明和旋量证明的一个共同令人好奇的特点是在更高维, 正质量定理的等式情形似乎需要一个与“非负质量定理”成立所需要的标准定义相比更强的对渐近平坦性的定义. 有些令人吃惊地, 事实表明当空间维数高于 8 时, 确实存在所期待的严格不等式 $E > |P|$ 的反例. 见 [HL20a] 的例 7. 那些例子出自于 Einstein 方程的一族重要的精确解, 叫做具有平行射线的平面前波 (plane-fronted waves with parallel rays)(或简称为 *pp* 波 (*pp-waves*)), 它模拟了以光速运动的辐射, 因此任意类空分层面都自然地有 $E = |P|$ (只要这些量可以被定义). 反例来自于这样的 *pp* 波的分层面: 它足够渐近平坦以满足非负质量定理的假设, 但又不够渐近平坦到满足正质量定理等式情形的假设.

Penrose 的进步只到近期才被授予了 Nobel 物理学奖, 他所引进的拓扑上的和几何的方法帮助建立起了数学和广义相对论在过去几十年间的一个长久的, 紧密的关系. 作为很好的几何, 拓扑, 分析, 和广义相对论之间有趣的相互影响的例子, 我们讨论了 Hawking, Schoen, 和丘成桐开创性的工作. 新的应用和数学与广义相对论之间的相互联系在近期的发展中一直在不断地被发现, 如前所述. 要看更多更详细的关于这个研究领域的介绍, 请见本文第 2 作者最近所写的研究生水平的课本 [Lee19]. 我们期待物理和数学想法的交换将继续为我们在此仅很浅触及的这些问题的方向提供活力, 我们在这里只是稍微地提到了. Penrose 曾经说, “这里我们有一个一致性的闭合圆圈: 物理定律产生复杂系统, 这些复杂系统带来意识, 它又产生数学, 数学又以一种简洁而又启发灵感的方式蕴含隐藏着产生它的最底层的物理定律.”

参考文献

- [AEM11] Lars Andersson, Michael Eichmair, and Jan Metzger, Jang’s equation and its applications to marginally trapped surfaces, *Complex analysis and dynamical systems IV. Part 2, Contemp. Math.*, vol. 554, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 13–45, DOI 10.1090/conm/554/10958. MR2884392
- [BC96] Robert Beig and Piotr T. Chruściel, Killing vectors in asymptotically flat spacetimes. I. Asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem, *J. Math. Phys.* 37 (1996), no. 4, 1939–1961, DOI 10.1063/1.531497. MR1380882
- [CH20] Justin Corvino and Lan-Hsuan Huang, Localized deformation for initial data sets with the dominant energy condition, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 59 (2020), no. 1, Paper No. 42, 43, DOI 10.1007/s00526-019-1679-9. MR4062040
- [EG96] A. Eckart and R. Genzel, Observations of stellar proper motions near the galactic centre, *Nature* 383 (1996), no. 6599, 415–417.
- [Eic09] Michael Eichmair, The Plateau problem for marginally outer trapped surfaces, *J. Differential Geom.* 83 (2009), no. 3, 551–583. MR2581357
- [EHLS16] Michael Eichmair, Lan-Hsuan Huang, Dan A. Lee, and Richard Schoen, The spacetime positive mass theorem in dimensions less than eight, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 18 (2016), no. 1, 83–121, DOI 10.4171/JEMS/584. MR3438380
- [Eve19] Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *ApJL* 875 (April 2019), no. 1, L1, available at 1906.11238.

- [GS06] Gregory J. Galloway and Richard Schoen, A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions, *Comm. Math. Phys.* 266 (2006), no. 2, 571–576, DOI 10.1007/s00220-006-0019-z. MR2238889
- [GKMB98] A. M. Ghez, B. L. Klein, M. Morris, and E. E. Becklin, High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A^* : Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy, *ApJ* 509 (December 1998), no. 2, 678–686, available at astro-ph/9807210.
- [GHHP83] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Gary T. Horowitz, and Malcolm J. Perry, Positive mass theorems for black holes, *Comm. Math. Phys.* 88 (1983), no. 3, 295–308. MR701918
- [Haw72] S. W. Hawking, Black holes in general relativity, *Comm. Math. Phys.* 25 (1972), 152–166. MR293962
- [Haw73] S. W. Hawking, *The event horizon*, Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Black Holes, 1973.
- [HL20a] Lan-Hsuan Huang and Dan A. Lee, Bartnik mass minimizing initial data sets and improbability of the dominant energy scalar, arXiv:2007.00593 [math.DG] (2020).
- [HL20b] Lan-Hsuan Huang and Dan A. Lee, Equality in the spacetime positive mass theorem, *Comm. Math. Phys.* 376 (2020), no. 3, 2379–2407, DOI 10.1007/s00220-019-03619-w. MR4104553
- [Lee19] Dan A. Lee, *Geometric relativity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 201, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019. MR3970261
- [LLU21] Dan A. Lee, Martin Lesourd, and Ryan Unger, Density and positive mass theorems for initial data sets with boundary, arXiv:2112.12017 [math.DG] (2021).
- [Pen65] Roger Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.* 14 (1965), 57–59, DOI 10.1103/PhysRevLett.14.57. MR172678
- [SY79] Richard Schoen and Shing Tung Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* 65 (1979), no. 1, 45–76. MR526976
- [SY81] Richard Schoen and Shing Tung Yau, Proof of the positive mass theorem. II, *Comm. Math. Phys.* 79 (1981), no. 2, 231–260. MR612249
- [Wit81] Edward Witten, A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* 80 (1981), no. 3, 381–402. MR626707

图片来源

开场图片承蒙美国宇航局 (NASA) Goddard 太空飞行中心提供; 背景, 欧空局 /Gaia/DPAC.
 图 1 承蒙美国宇航局, ESA, 和 D. Coe, J. Anderson, R. van der Marel (STScI) 提供.
 图 3 承蒙 NASA/JPL-Caltech/IPAC/Event Horizon Telescope Collaboration 提供.
 图 5–8 和图 10 承蒙黄篮萱提供.
 图 9 承蒙 Nick Schmitt 提供.

(龚雪飞 译 黄卫国 校)

(上接 305 页)

- [K] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 51 (1980), 137–173. MR573822
- [L] Mikhail Lyubich, Feigenbaum-Couillet-Tresser universality and Milnor’s hairiness conjecture, *Ann. of Math. (2)* 149 (1999), no. 2, 319–420, DOI 10.2307/120968. MR1689333
- [MS] Wellington de Melo and Sebastian van Strien, *Onedimensional dynamics*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1993, DOI 10.1007/978-3-642-78043-1. MR1239171

(下转 382 页)